Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fís. y Nat., Buenos Aires, Argentina, tomo 50, 1998.

SOBRE LA GEOMETRÍA DEL CONJUNTO DE OPERADORES POSITIVOS EN ESPACIOS DE HILBERT

Gustavo Corach

Instituto Argentino de Matemática - CONICET. Departamento de Matemática, FCEyN-UBA.

Resumen

En un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se estudia la estructura geométrica del conjunto $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ de todos los operadores lineales acotados inversibles que son positivos. Se describen, en particular, las geodésicas de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$. Relaciones con varias áreas de la matemática y la física se describen con algún detalle.

Abstract

Given a Hilbert space $\mathcal{H}$ the set $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ of all positive invertible bounded linear operators on H is studied from a differential geometrical view point. Particular attention is paid to the study of the geodesics of $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$. The relationship with another parts of mathematics and physics are discussed.

Introducción

En lo que sigue, $\mathcal{H}$ denota un espacio de Hilbert sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ es el álgebra de los operadores lineales acotados sobre $\mathcal{H}$ y $\mathbf{L}(\mathcal{H})_h$ es el subespacio (real) constituido por los operadores *autoadjuntos* (también llamados *hermitianos o simétricos)*:

$$\mathbf{L}(\mathcal{H})_h = \{S \in \mathbf{L}(\mathcal{H}) : S^* = S\}$$

donde para cada $T \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ el adjunto T^* está definido por la relación

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad (x, y) \in \mathcal{H}$$

siendo $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interno de $\mathcal{H}$.

Consideramos también el conjunto

$$\mathbf{L}(\mathcal{H})^+ = \{S \in \mathbf{L}(\mathcal{H})_h : \langle Sx, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}\}.$$

Denotamos por $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$ al grupo de operadores inversibles en $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ (o sea el grupo de unidades del álgebra $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ y $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+ = \mathbf{GL}(\mathcal{H}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{H})^+$. También consideramos $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h = \mathbf{L}(\mathcal{H})_h \cap \mathbf{GL}(\mathcal{H})$ y el subgrupo $\mathcal{U}$ de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$ constituido por los operadores *unitarios* de $\mathbf{L}(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathbf{L}(\mathcal{H}) : U^* U = UU^* = 1\}.$$

Este trabajo es una reseña del estudio del espacio $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ y de partes de $\mathbf{L}(\mathcal{H})^+$, reali-

Acto realizado con motivo de la entrega del premio "Alberto González Domínguez" en Matemática, el 21 de noviembre de 1997.

zado por el autor en colaboración con Esteban Andruchow, Alejandra Maestripieri, Mario Milman, Horacio Porta, Lázaro Recht y Demetrio Stojanoff.

Además del posible interés intrínseco que tiene este tema, existen indudablemente nexos con geometría de espacios de Finsler, teorías de interpolación, análisis matricial, estadística, mecánica cuántica, ecuaciones diferenciales, etc., que de alguna manera justifican esta reseña.

Los contenidos del trabajo son los siguientes. La sección 1 es una descripción de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ como variedad diferenciable y como espacio homogéneo de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$. En la sección 2 exhibimos a $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ como base de un fibrado principal con una conexión natural y determinamos explícitamente las geodésicas de esta conexión. En la sección 3 estudiamos la descomposición polar de operadores inversibles, que en la sección 5 se utilizará para definir diversos fibrados sobre $\mathcal{U}$, con fibra difeomorfa a $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$. En la sección 4 introducimos una métrica de Finsler en $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ que permite medir longitudes de curvas. Con esta métrica las curvas geodésicas de la sección 2 resultan ser curvas minimales. Más aún, veremos que con esta métrica $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ verifica propiedades que, en el caso de variedades Riemannianas, caracterizan a las variedades con curvatura no positiva. En la sección 5 estudiamos $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ como componente conexa de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$ y como fibra de una función asociada a la descomposición polar. En la sección 6 estudiamos a $\mathbf{L}(\mathcal{H})^+$ como cono convexo, lo que permite en particular partir a $\mathrm{L}(\mathcal{H})^+$ en una serie de subconjuntos, llamados *componentes de Thompson* cada uno de los cuales resulta ser una variedad (uno de estos componentes es, en realidad, $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$) y todo lo estudiado sobre $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ puede reproducirse en cada componente.

La sección 7 contiene, junto con las referencias bibliográficas, una serie de comentarios sobre los resultados anteriores y sus nexos con diversas áreas de matemática y física.

1. $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ como variedad diferenciable

Es un hecho bien conocido que $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$ es un subconjunto abierto de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$. De esto resulta que $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h = \mathbf{GL}(\mathcal{H}) \cap \mathrm{L}(\mathcal{H})_h$ es abierto en el espacio de Banach (real) $\mathbf{L}(\mathcal{H})_h$. Asimismo se puede probar que $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ es un subconjunto abierto de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$. De esta manera, $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ resulta ser una variedad diferenciable, subvariedad abierta de $\mathbf{L}(\mathcal{H})_h$ y para todo $A \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ el espacio tangente $(T\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+)_A$ se identifica con $\mathbf{L}(\mathcal{H})_h$.

Consideremos ahora la acción de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$ sobre $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ definida por

$$L : \mathbf{GL}(\mathcal{H}) \times \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+ \to \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$$

$L(V, A) = L_V A = V A V^*$.

Esta acción determina para cada $A \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ una función diferenciable

$$\pi_A : \mathbf{GL}(\mathcal{H}) \to \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$$

$$\pi_A(V) = V A V^*$$

con las siguientes propiedades, de fácil verificación:

1) π_A es suryectiva;

2) π_A es abierta (si $\mathbf{U} \subset \mathbf{GL}(\mathcal{H})$ es abierto entonces $\{V A V^* : V \in \mathbf{U}\}$ es abierto en $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$);

3) π_A admite secciones locales diferenciables (para cada $B = \pi_A(V)$ existen un abierto $\mathbf{W}$ en $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ y una función diferenciable $s : \mathbf{W} \to \mathbf{GL}(\mathcal{H})$ tales que $\pi_A(s(B)) = B$ para todo $B \in \mathbf{W}$).

Estas propiedades convierten a $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ en un espacio homogéneo de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$, a fortiori muestran que cada π_A es un fibrado principal.

2. Conexión y geodésicas

A partir de ahora estudiaremos exclusivamente el caso $A = 1$, es decir la función $\pi : \mathbf{GL}(\mathcal{H}) \to \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ $\pi(W) = WW^*$.

Obsérvese que $\mathcal{U} = \{U \in \mathbf{GL}(\mathcal{H}) : U^* = U^{-1}\}$, coincide con $\pi^{-1}(1)$o sea con el grupo de isotropía de π.

La función $\pi : \mathbf{GL}(\mathcal{H}) \to \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ es evidentemente diferenciable y su diferencial en I es la función lineal $(T\pi)_1 X = X + X^*$. Así, $\mathbf{L}(\mathcal{H})_h$ es un suplemento algebraico del núcleo de $(T\pi)_1$, que consiste del espacio de operadores antihermitianos.

Más aún, dado $W \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})$

$$(T\pi)_W X = XW^* + WX^*$$

y entonces, si definimos

$\mathbf{V}_W = \{X : XW^* + WX^* = 0\}$

y $\mathbf{H}_W = W\mathbf{L}(\mathcal{H})_h$, obtenemos:

1) $\mathbf{L}(\mathcal{H}) = \mathbf{H}_W \oplus \mathbf{V}_W$ si $W \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})$;

2) $U\mathbf{H}_1 U^* = \mathbf{H}_1$ si $U \in \mathcal{U}$;

3) $\mathbf{H}_W U = \mathbf{H}_{WU}$ si $U \in \mathcal{U}$, $W \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})$.

A una distribución $W \to \mathbf{H}_W$ de este tipo en geometría diferencial se la llama una *conexión* cuando es diferenciable, o sea cuando la función que le asigna a cada W la proyección $\Phi_W : \mathbf{L}(\mathcal{H}) \to \mathbf{L}(\mathcal{H})$ con núcleo $\mathbf{V}_W$ e imagen $\mathbf{H}_W$ es diferenciable. En nuestro caso,

$$\Phi_W(X) = \frac{1}{2}(X + WX^*W^{*-1}) \quad (X \in \mathbf{L}(\mathcal{H}))$$

que depende diferenciablemente de W.

A los vectores de $\mathbf{H}_W$ se los denomina *horizontales.*

En todo fibrado localmente trivial

$$p : E \to B$$

cada curva diferenciable $\gamma : [0, 1] \to B$ admite un levantamiento, esto es existe una curva diferenciable $\Gamma : [0, 1] \to E$ tal que $p[\Gamma(t)) = \gamma(t)$ $(t \in [0, 1])$. Si el fibrado tiene definida una conexión existe un levantamiento (esencialmente único) que es *horizontal* en el sentido de que $\dot{\Gamma}(t) = \frac{d}{dt}\Gamma(t) \in \mathbf{H}_{\gamma(t)}$ $(t \in [0, 1])$.

En nuestro caso, existe una ecuación diferencial lineal, a saber

$$\dot{\Gamma} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\gamma^{-1}\Gamma, \qquad \Gamma(0) = W$$

cuya única solución es el levantamiento horizontal de γ que comienza en W (demostraciones de este hecho se encuentran en [19], y [12]).

Si $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ es una curva diferenciable y $\Gamma : [0, 1] \to \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ es un levantamiento diferenciable de γ entonces Γ es horizontal si y sólo si $\dot{\Gamma}\Gamma^*$ es hermitiano. En efecto, Γ es un levantamiento si y sólo si $\gamma = \Gamma\Gamma^*$. En tal caso $\dot{\Gamma} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\gamma^{-1}\Gamma$ se convierte en $\dot{\Gamma}\Gamma^* = \Gamma\dot{\Gamma}^*$ o sea que $\dot{\Gamma}\Gamma^*$ es hermitiano. Recíprocamente si $\dot{\Gamma}\Gamma^* = \Gamma\dot{\Gamma}^*$ y $\gamma = \Gamma\Gamma^*$ entonces $\dot{\Gamma}\Gamma^{-1} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\gamma^{-1}$ de donde Γ es el único levantamiento horizontal de γ.

Esta ecuación diferencial se denomina la *ecuación de transporte* de la conexión y permite definir derivadas covariantes de campos tangentes a lo largo de una curva γ en $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$: si γ es una curva diferenciable en $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ y X es un campo tangente a lo largo de γ, de modo que $X(t) \in (T\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+_{\gamma(t)}$ la *derivada covariante de* X es

$$\frac{DX}{dt} = \dot{X} - \frac{1}{2}\left(X\gamma^{-1}\dot{\gamma} + \dot{\gamma}\gamma^{-1}X\right)$$

$$= \Gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\left(TL_{\Gamma(t)^{-1}}\right)_{\gamma(t)} X(t)\right)\Gamma(t)^*$$

Un campo X es *paralelo* si $\frac{Dx}{dt} = 0$.

Una curva γ es una *geodésica* de la conexión si $\dot{\gamma}$ es un campo paralelo, es decir si $\ddot{\gamma} = \dot{\gamma}\gamma^{-1}\dot{\gamma}$.

Es fácil probar que la conexión es invariante por la acción, es decir que si γ es una geodésica entonces $W\gamma W^*$ es también una geodésica.

Las geodésicas con origen 1 tienen la forma

$$\gamma(t) = e^{tZ}\ , \quad Z \in \mathbf{L}(\mathcal{H})_h = (T\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+)_1$$

donde $Z = \dot\gamma(0)$. En general, la única geodésica γ con origen A tal que $\dot\gamma(0) = X \in (T\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+_A$ es

$$\gamma(t) = A^{1/2} e^{tA^{-1/2}XA^{-1/2}} A^{1/2}.$$

Este hecho permite determinar explícitamente la función exponencial de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ como espacio homogéneo:

$$\exp_A : (T\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+)_A \to \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$$

está dado por $\exp_A X = A^{1/2} e^{A^{-1/2}XA^{-1/2}} A^{1/2}$.

Esta función es, en este caso, un difeomorfismo cuya función inversa está determinada por

$$\log_A W = A^{1/2} \log (A^{-1/2}WA^{-1/2})A^{1/2}.$$

Otra característica de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ es que dos puntos cualesquiera A, B determinan una única geodésica con esos extremos, a saber

$$\gamma_{A,B}(t) = A^{1/2}(A^{-1/2} BA^{-1/2})^t A^{1/2}, \ (t \in [0, 1]),$$

3. Descomposición polar

Recordemos que todo $W \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})$ se puede escribir de manera única como producto de un operador positivo y de un operador unitario. Explícitamente,

$$W = (WW^*)^{1/2}[(WW^*)^{-1/2}W]$$

donde evidentemente $(WW^*)^{1/2} \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ y el hecho de que $(WW^*)^{-1/2}W$ sea unitario resulta de una identidad del tipo

$$f(WW^*)W = Wf(W^*W)$$

para cualquier función continua (más generalmente, medible Borel y acotada) definida en el compacto $\sigma(WW^*) \cup \{0\}$.

Para abreviar, nos referiremos a $(WW^*)^{-1/2}W$ como *la parte unitaria* de W. Una consecuencia de la forma explícita de los levantamientos horizontales de curvas γ en $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ es la siguiente: un levantamiento diferenciable Γ de γ es horizontal si y sólo si su parte unitaria U satisface la ecuación

$$\dot U U^* = \frac{1}{2}\left(\left(\gamma^{1/2}\right)^{\cdot} \gamma^{-1/2} - \gamma^{-1/2}\left(\gamma^{1/2}\right)^{\cdot}\right)$$

(ver [12]).

4. Métrica de Finsler en $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$

Para motivar la introducción de la métrica de Finsler en $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$, observamos que cada $A \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ define un producto interno $<\ ,\ >_A$ en $\mathcal{H}$ mediante

$$< x, y >_A = < Ax, y > .$$

Denotaremos $\mathcal{H}_A$ al espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, <\ ,\ >_A)$. Observemos que

$$\|x\|_A = < x, x >_A^{1/2} = \|A^{1/2} x\|.$$

Proposición. *Para cada* $W \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})$, W^* *es un isomorfismo isométrico de* $\mathcal{H}_{WAW^*}$ *sobre* $\mathcal{H}_A$.

Identificando $(T\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+)_A$ con $\mathbf{L}(\mathcal{H})_h$ y viendo que cada $X \in \mathbf{L}(\mathcal{H})_h$ induce una forma sesquilineal

$$B_X : \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_A \to \mathbb{C}, \quad B_X(x, y) = < Xx, y >$$

definimos

$$\|X\|_A = \|B_X\| =$$

$$= \sup \{|< Xx, y >| \ : \ \|x\|_A \leq 1, \|y\|_A \leq 1\}$$

Proposición. *(i)* $\|X\|_A = \|A^{-1/2} XA^{-1/2}\|$

(ii) Para cada $W \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})$

$$\|WXW^*\|_{WAW^*} = \|X\|_A.$$

Estos hechos permiten probar que la función $A \mapsto \|\ \|_A$ es una métrica de Finsler, a saber una función suave que asigna a cada $A \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ una norma en el espacio tangente a $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ en A. Más aún, la acción de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$ sobre $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ es isométrica.

Esta situación es más general que la que ocurre en las variedades de Riemann, en las que hay un producto escalar en cada espacio tangente, que varía suavemente con el punto base.

La *longitud* de una curva diferenciable $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ puede ahora definirse como

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}\, dt.$$

Teorema. *Para todo par A, $B \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ la geodésica $\gamma_{A,B}$ es la curva de longitud más corta que une A y B en $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$. Su longitud es* $\left\|\log\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)\right\|$.

(ver [18] y [12]).

Llamaremos *distancia geodésica* entre A y B al número

$$d(A,B) = L(\gamma_{A,B}) = \|\log(A^{-1/2}\ BA^{-1/2})\|.$$

Si bien de su forma no podemos afirmar inmediatamente que d cumple los axiomas de una métrica, el teorema anterior muestra que

$$d(A, B) = \inf L(\gamma)$$

donde el ínfimo se toma entre todas las curvas diferenciables que unen A y B y es un hecho general que ese ínfimo define una métrica en la variedad $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$.

El teorema siguiente contiene tres propiedades del espacio métrico $(\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+, d)$ que son de gran interés en geometría diferencial (véase [15], [18], [17], [2]).

Teorema. *(i) Si A, $B \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ entonces $d(A, B) \geq \|\log A - \log B\|$;*

(ii) Si A, $B \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ y $t \in [0, 1]$ entonces $d(A^t, B^t) \leq td(A, B)$;

(iii) Si γ, δ son geodésicas en $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ *entonces $\varphi(t) = d(\gamma(t), \delta(t))$ es una función convexa.*

En geometría riemanniana, estas propiedades caracterizan a las variedades riemannianas con curvatura seccional no positiva. Como $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ no es una variedad de Riemann porque sus espacios tangentes no son hilbertizables (o sea no existe una norma euclídea sobre ellos), no existe una noción de curvatura seccional. Sin embargo, estos resultados muestran que $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ se comporta como una variedad de Finsler "negativamente curvada". Sobre este aspecto, el lector puede consultar las monografías de Gromov [27], Jost [28]. Nikolaev [30], Ballmann [6], [7], Eberlein [23].

5. El espacio $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$

El espacio $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$ de operadores hermitianos inversibles tiene también una estructura geométrica muy rica cuya relación con la de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ describiremos en esta sección.

Como $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$, también $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$ es un subconjunto abierto de $\mathbf{L}(\mathcal{H})_h$ y como tal una subvariedad abierta cuyos espacios tangentes se identifican con $\mathbf{L}(\mathcal{H})_h$. Existe también una acción

$$L : \mathbf{GL}(\mathcal{H}) \times \mathbf{GL}(\mathcal{H})_h \to \mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$$

que extiende a la de la sección 1:

$$L(V, A) = L_V A = V AV^*.$$

Como consecuencia de esta acción se define para cada $A \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$, la función diferenciable

$$\pi_A : \mathbf{GL}(\mathcal{H}) \to \mathbf{GL}(\mathcal{H})_h, \quad \pi_A(V) = V AV^*$$

que no es suryectiva (como sí lo es la función análoga del caso $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$) pero que es abierta y admite secciones diferenciables. De esta manera, la imagen de π_A (o sea la órbita de A por la acción L) es un espacio homogéneo de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$ y admite una conexión natural, gobernada por la misma ecuación de transporte que en el caso de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$. Obsérvese que $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ es una de las órbitas de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$, a saber la que corresponde a cualquier $A \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$. Además, no sólo $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ sino cada órbita $\pi_A(\mathbf{GL}(\mathcal{H}))$ ($A \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$) es una componente conexa de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$, resultado clásico de teoría espectral debido a A. Wintner. Si en lugar de trabajar en el contexto de $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ lo hiciéramos en el de un álgebra C^* abstracta A con unidad, entonces el grupo de inversibles $\mathbf{G}A$ podría no ser conexo. Sin embargo $\mathbf{G}A^+$ es conexo: en efecto, exp: $A_h \to \mathbf{G}A^+$ es un difeomorfismo con inversa log.

Veamos el comportamiento de los elementos de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$ con respecto a la descomposición polar. Como vimos, cada $W \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})$ se escribe de manera única como

$$W = AU,$$

siendo $A \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ y $U \in \mathcal{U}$.

Si $W \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$ entonces se comprueba fácilmente que $AU = UA$. Por otro lado $AU = (AU)^* = U^*A$ y entonces $U = U^*$. Esto muestra que tomar la parte unitaria de un operador hermitiano inversible define una función claramente diferenciable,

$$\rho : \mathbf{GL}(\mathcal{H})_h \to \mathbf{P}, \quad \rho(W) = U,$$

siendo $\mathbf{P} = \{W \in \mathbf{GL}(\mathcal{H}) : W = W^* = W^{-1}\}$.

Esta función es un fibrado localmente trivial y su estudio tiene consecuencias muy interesantes. Sólo mencionaremos que $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ es una de las fibras de ρ. Más precisamente,

$$\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+ = \rho^{-1}(1).$$

En general, si $S \in \mathbf{P}$ entonces

$$\rho^{-1}(S) = \{AS : A \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+, AS = SA\}.$$

Para definir una métrica de Finsler sobre $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$ o sea una norma $\|\cdot\|_W$ sobre $(T\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h)_W$ *para cada* $W \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$, utilizamos la descomposición polar $W = AU$. Observemos que cada $X \in (T\,\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h)_W = \mathbf{L}(\mathrm{H})_h$ define una $B_X(x, y) = \langle Xx, y \rangle$. Definimos

$$\|X\|_W = \|B_X\| =$$
$$= \sup\{|\langle Xx, y\rangle| : \|x\|_W \le 1, \|y\|_W \le 1\}$$

donde la norma de la forma B_X se calcula cuando en $\mathcal{H}$ se define el producto escalar

$$\langle x, y \rangle_W = \langle Ax, y \rangle .$$

Obsérvese que si $W \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ entonces $W = A$ y la definición coincide con la de la sección 4.

Si $X \in (T\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h)_W$ entonces

Proposición. *(i)* $\|X\|_W = \|A^{-1/2} X A^{-1/2}\|$.

(ii) $\|X\|_W = \|VXV^*\|_{VWV^*}$ *para todo* $V \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})$.

El resultado siguiente el teorema análogo de la sección 4.

Teorema. *Si* W_0, $W_1 \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$ y $\rho(W_0) = \rho(W_1) = U$ *entonces existe una única geodésica* γ *en* $\rho^{-1}(U) \subset \mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$ *tal que* $\gamma(0) = W_0$ *y* $\gamma(1) = W_1$. *La forma de* γ *es*

$$\gamma(t) = A_1^{1/2}\left(A_1^{-1/2} A_2\, A_1^{-1/2}\right)^t A_1^{1/2} U,$$

donde A_1 *(resp.* A_2*) es la parte positiva de la descomposición polar de* W_1 *(resp.* W_2*).*

Más aún, γ *es la curva diferenciable en* $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$ *de longitud mínima entre todas las que unen* W_0 *y* W_1 *dentro de* $\rho^{+}(U)$.

La demostración de este teorema está basada en el hecho de que la diferencial de la función ρ: $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h \to \mathbf{P}$ es una contracción, en el sentido de que

$$\|(T\rho)_W\| \le \|X\|_W \qquad \left(\mathbf{X} \in \left(T\,\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h\right)\right)_W\Big)$$

y este hecho depende a su vez de la desigualdad

$$\|STS^{-1} + S^{-1}TS\| \ge 2\|T\|$$

válida para todo $S \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$, $T \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$.

Sobre esta desigualdad y otras equivalentes el lector puede consultar [2].

6. El cono $\mathbf{L}(\mathcal{H})^+$

Es fácil comprobar que $\mathbf{L}(\mathcal{H})^+$ es un cono convexo cerrado de $\mathbf{L}(\mathcal{H})_h$. En este tipo de conos A.C. Thompson [41] introdujo la siguiente relación de equivalencia: $A \sim B$ si y sólo si existen números positivos r, s tales que $rA \le B \le sA$ (donde, dados $C, D \in \mathbf{L}(\mathcal{H})_h$ $C \le D$ significa $< Cx, x > \le < Dx, x >$ $\forall x \in \mathcal{H}$). Dado $A \in \mathbf{L}(\mathcal{H})^+$ llamaremos *componente* de A al conjunto

$$C_A = \{B \in \mathbf{L}(\mathcal{H})^+ : A \sim B\}.$$

Por otra parte, R.G. Douglas [22] probó el siguiente resultado, válido para operadores $A, B \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$. Son equivalentes:

(1) imA $\subset$ imB

(2) existe $r > 0$ tal que $AA^* \le rBB^*$

(3) existe $C \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ tal que $A = BC$.

Usando la equivalencia entre (1) y (2) resulta que para cada $A \in \mathbf{L}(\mathcal{H})^+$

$$C_A = \{B \in \mathbf{L}(\mathcal{H})^+ : \mathrm{im}A^{1/2} = \mathrm{im}B^{1/2}\}.$$

donde si $D \in \mathbf{L}(\mathcal{H})^+$, $D^{1/2}$ denota el único operador positivo cuyo cuadrado es D.

De esta manera, el conjunto de componentes de $\mathbf{L}(\mathcal{H})^+$ queda parametrizado por un conjunto de subespacios de $\mathcal{H}$, a saber aquellos que pueden representarse como la imagen de un operador positivo. Puede probarse que si S = imT para un cierto $T \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$, entonces $S = \mathrm{im}(TT^*)^{1/2}$. Esta clase de subespacios es de mucho interés en teoría de operadores (ver [20], [21], [24]). Obsérvese que la componente que corresponde al subespacio $S = \mathcal{H}$ es precisamente $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$.

El resultado principal del trabajo de Thompson es que cada componente es un espacio métrico completo con la métrica (que nosotros describimos sólo para el caso concreto de $\mathbf{L}(\mathcal{H})^+$ pero que vale en general)

$$d_T(B, C) = $$
$$= \max\{\log \sup\{r > 0 : rB \le C\}, \log \inf\{s > 0 : B \le sC\}.$$

El interés de este resultado reside en aplicaciones a la teoría de ecuaciones diferenciales e integrales, que se remontan a un trabajo de G. Birkhoff [9]. En él se utilizó una pseudométrica (llamada *métrica proyectiva de Hilbert*) para transformar una ecuación diferencial en un problema de punto fijo en un cono convexo. El problema tiene solución porque cierta función asociada es una contracción en cada componente del cono con respecto a la métrica de Hilbert. Sobre estos temas el lector encontrará una excelente exposición en las monografías de Nussbaum [31], [32].

La relevancia de la métrica de Thompson con referencia a la geometría de los operadores positivos reside en el siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en [13].

Teorema. *Cada componente de $\mathbf{L}(\mathcal{H})^+$ es un espacio homogéneo con estructura diferenciable y métrica de Finsler. Las geodésicas de cada componente son curvas cortas. En cada componente la distancia geodésica coincide con la distancia de Thompson.*

Referencias

El estudio de la estructura de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$ como variedad diferenciable y como unión de espacios homogéneos de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$, así como de sus geodésicas y de su métrica de Finsler se encuentran en [19]. La desigualdad $\|STS^{-1} + S^{-1}TS\| \ge 2\|T\|$ mencionada en la sección 6 fue probada en [14]. En el trabajo [2] se muestra que hay varias desigualdades equivalentes, una de las cuales

$$\|STS + S^{-1}TS^{-1}\| \ge 2\|T\| \quad (S \in \mathbf{GL}(x)_h, T \in L(x))$$

es la clave para demostrar que en el fibrado localmente trivial

$$\rho : Q \to P, \; \rho(AU) = U ,$$

donde $Q = \{E \in \mathbf{L}(\mathcal{H}) : E^2 = I\}$, las fibras $\rho^{-1}(U)$ son geodésicamente completas y las geodésicas son curvas cortas para la métrica de Finsler

$$\|X\|_E = \|A^{1/2} X A^{-1/2}\|,$$

donde $X \in (TQ)_E$, $E = AU$. Estos resultados se encuentran en [19]. La descripción de los componentes de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})_h$ así como sus geodésicas y propiedades geométricas en general se encuentran en [19]. El lector puede consultar en [10], [31], [32], [39] diversas aplicaciones de las métricas de Hilbert y Thompson.

Sobre la desigualdad $\|A^tB^t\| \le \|AB\|^t$ $(A, B \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+, 0 \le t \le 1)$ y varios resultados relacionados, el lector puede consultar [25]. En [4] se demuestra que esa desigualdad es equivalente a la propiedad $d(A^t, B^t) \le td(A, B)$ y que de ella se deduce fácilmente $d(A, B) \ge \|\log A - \log B\|$, que a su vez es equivalente a la desigualdad de I. Segal $\|\exp(S+T)\| \le \|\exp\frac{S}{2}\exp T\exp\frac{S}{2}\|$ (ver [15]). Cabe señalar que una versión de esta desigualdad para la norma de la traza, probada por S. Golden [26] y C.J. Thompson [42], tiene mucho interés en mecánica estadística y continúa siendo objeto de estudios y generalizaciones en varias direcciones. Es interesante notar que la desigualdad de Segal tiene un preciso sentido geométrico, así como la desigualdad de Heinz con la que comenzamos este párrafo. Es probable que lo mismo ocurra con las desigualdades de Golden y Thompson para la métrica riemanniana inducida por la norma de la traza.

Cada $A \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ induce sobre $\mathcal{H}$ un producto escalar equivalente al dado y a su vez induce una involución $*_A$. En el trabajo [3] se estudia la función $(A, \mathbf{S}) \mapsto \varphi(A, \mathbf{S})$ que cada $A \in \mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ y cada subespacio cerrado S de $\mathcal{H}$ le asocia la única proyección $\varphi(A, \mathbf{S})$ con imagen $\mathbf{S}$ que es $*_A$-hermitiana. La geometría del conjunto de proyecciones no necesariamente hermitianas ha sido desarrollada en [16].

La geometría del conjunto de operadores de densidad (es decir, operadores positivos con traza 1) ha probado ser un instrumento muy útil en la descripción operatorial de la llamada fase de Berry [8], fenómeno relacionado con el principio de superposición de la mecánica cuántica. El lector encontrará en los trabajos de A. Uhlmann [43], [44], D. Petz [37], [38] y otros [35] resultados en esta dirección. Los trabajos de Amari, Ohara y otros matemáticos japoneses [1], [33], [34] contienen aplicaciones de la geometría de las matrices positivas inversibles a ciertos problemas de la teoría de control lineal y estadística.

Una interesante relación con la teoría de interpolación de operadores la brindan los hechos siguientes. Dos normas $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_B$ como en la sección 4 pueden unirse mediante una curva de interpolación, a saber una curva $\|\cdot\|_t$ tal que $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_B$.

En un trabajo clave en teoría de interpolación, A.P. Calderón [11] definió lo que se llama el *método complejo* de interpolación. Supongamos que se une a $\|\cdot\|_A$ con $\|\cdot\|_B$ utilizando la construcción de Calderón. Se obtiene entonces en el instante t la norma $\|\cdot\|_t$ que resulta ser $\|\cdot\|_{\gamma_{A,B}(t)}$. Más aún, si en el cono convexo N de las normas en $\mathcal{H}$ que son equivalenes a la norma definida por el producto interno < , >, la *distancia* de *Banach-Mazur* sobre N

$$d(\|\ \|_1, \|\ \|_2) = \max\left\{\log\sup_{x\neq 0}\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}, \log\sup_{x\neq 0}\frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}\right\}$$

coincide con la distancia geodésica de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})^+$ (y por lo tanto con la de Thompson). Estos resultados se encuentran en [5].

Son innumerables las aplicaciones a la estadística de la geometría de los conjuntos de matrices positivas inversibles así como también del de las matrices idempotentes (proyecciones oblicuas). Esperamos tratar estos temas en profundidad en otro trabajo.

Agradecimientos

El autor contó con el apoyo de la Beca Antorchas y de los proyectos TX92

UBACYT, PIP 4463/96 CONICET y PICT 97-2259 ANPCyT.

Referencias

[1] AMARI S. (1982) Differential geometry of curved exponential families-curvatures and information loss, *Annals of Statistics* 10, 357-385.

[2] ANDRUCHOW E., CORACH G., STOJANOFF D. (1997) Geometric operator inequalities, *Linear Algebra and its Applications* 258, 295-310.

[3] ANDRUCHOW E., CORACH G., STOJANOFF D. Geometry of oblique projections, *Studia Math.* (en prensa).

[4] ANDRUCHOW E., CORACH G., STOJANOFF D. Geometrical significance of the Löwener-Heinz inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* (en prensa).

[5] ANDRUCHOW E., CORACH G., MILMAN M., STOJANOFF D. (1997) Geodesics and interpolation, *Rev. U.M.A.* 40, 83-91.

[6] BALLMANN W. (1995) *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin.

[7] BALLMANN W., GROMOV M., SCHROEDER V. (1985) *Manifolds of non positive curvature*, Birkhauser, Boston-Basel-Stutgart.

[8] BERRY M.V. (1984) Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, *Proc. Roy. Soc. London* A392, 45.

[9] BIRKHOFF G. (1957) Extensions of Jentzsch's theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* 85, 219-227.

[10] BUSHELL P.J. (1973) Hilbert's metric and positive contraction mappings in a Banach space, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 52, 330-338.

[11] CALDERON A.P. (1969) Intermediate spaces and interpolation: the complex method. *Studia Math* 24, 113-190.

[12] CORACH G., MAESTRIPIERI A.L. (1999) *Differential and metrical structure of positive operators*, Positivity 3, 297-315.

[13] CORACH G., MAESTRIPIERI A.L. Differential geometry on Thompsons's components of positive operators, *Reports on Mathematical Physics* (en prensa).

[14] CORACH G., PORTA H., RECHT L. (1990) An operator inequality, *Linear Algebra and its Applications* 142, 153-158.

[15] CORACH G., PORTA H., RECHT L. (1992) A geometric interpolation of Segal's inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* 115, 229-231.

[16] CORACH G., PORTA H., RECHT L (1993) The geometry of spaces of projections in C^*-algebras, *Adv. in Math.* 101, 59-77.

[17] CORACH G., PORTA H., RECHT L. (1993) Jacobi fields in C^*-algebras, *Linear Algebra and its Applications* 179, 271-275.

[18] CORACH G., PORTA H., RECHT L. (1993) Geodesics and operator means in the space of positive operators, *Internat. J. Math* 4, 193-202. MR94c:46114.

[19] CORACH G., PORTA H., RECHT L. (1993) The geometry of spaces of selfadjoint invertible elements of a C^*-algebra, *Integral Equations and Operator Theory* 16, 333-359.

[20] DIXMIER J. (1949) Étude sur les variétés de Julia, *Bull. Soc. Math.* France 77, 11-101.

[21] DIXMIER J. (1949) Sur les variétés J d'un espace de Hilbert, *J. Math. Pures Appl.* 28, 321-358.

[22] DOUGLAS R.G. (1966) On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 17, 413-416.

[23] EBERLEIN P.B. (1996) *Geometry of nonpositively curved manifolds*, The University of Chicago Press, Chicago and London.

[24] FILLMORE P.A., WILLIAMS J.P. (1971) On operator ranges, *Adv. Math.* 7, 254-281.

[25] FURUTA T (1989) Norm inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem, *Rev. Math. Phys* 1, 135-137.

[26] GOLDEN S. (1965) Löwer bounds for the Helmholtz function. *Phys. Rev.* 137, B1127-B1128.

[27] GROMOV M. (1981) *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, CEDIC/Fernand Nathan, Paris, MR.

[28] JOST J. (1997) *Nonpositive curvature: geometric and analitic aspects*. Birkhauser, Basel-Boston-Berlin.

[29] LIVERANI C., WOJTKOWSKI M.P. (1994) Generalization of the Hilbert metric to the space of positive definite matrices, *Pacific J. Math.* 166, 339-355.

[30] NIKOLAEV I. (1995) *Metric spaces of bounded curvature*. University of Illinois at Urbana.

[31] NUSSBAUM R. (1988) Hilbert's projective metric and iterated non linear maps, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 391.

[32] NUSSBAUM R. (1994) Finsler structures

for the part metric and Hilbert's projective metric and applications to ordinary differential equations, *Differential and Integral Equations* 7, 1649-1707.

[33] OHARA A., AMARI S. (1994) Differential geometric structures of stable state feedback systems with dual connections, *Kybernetika* 30, 369-386.

[34] OHARA A., SUDA N., AMARI D. (1996) Dualistic differential geometry of positive definite matrices and its applications to related problems, *Linear Algebra Appl.* 247, 31-53.

[35] OHYA M., PETZ D (1993) *Quantum entropy and its use*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New York.

[36] PASTERNAK-WINIARSKI Z. (1998) On the dependence of the orthogonal projector on deformations of the scalar product, *Studia Math* 128, 1-17.

[37] PETZ D. (1994) Geometry of canonical correlation on the state space of a quantum system, *J Math. Phys* 35(2), 780-795.

[38] PETZ D., SUDAR C. (1996) Geometry of quantum states, *J. Math. Phys.* 37, 2662-2673.

[39] POTTER A.J.B. (1977) Application of Hilbert's projective metric to certain classes of non homogeneous operators. *Quart. J. Math.* 28, 93-99.

[40] SEGAL I. (1969) Notes toward the construction of non linear relativistic quantum fields III, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75, 1390-1395.

[41] THOMPSON A.C. (1963) On certain contraction mappings in a partially ordered vector space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 14, 438-443.

[42] THOMPSON C.J. (1965) Inequality with applications in statistical mechanics. *J. Math. Phys.* 6, 1812-1813.

[43] UHLMANN A. (1993) Density operators as an arena for differential geometry, *Rep. Math. Phys.* 33, 253-263.

[44] UHLMANN A. (1995) Geometric phases and related structures, *Rep. Math. Phys.* 36, 461-481.

[45] VESENTINI E. (1976) Invariant metrics on convex cones, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* (Ser. 4) 3, 671-696.

Manuscrito recibido en octubre de 1999.